random な磁場をもつ Schrodinger 作用素のスペクトルについて(微分方程式とスペクトル・散乱理論)

上木, 直昌

数理解析研究所講究録
779巻 1992年 28-50

random な磁場をもつ Schrödinger 作用素のスペクトルについて

姫路工大理　上木直昌　(Naomasa Ueki)

1. Introduction

この note では random な磁場をもつ Schrödinger 作用素のスペクトルについて調べる。特に状態密度関数の漸近挙動を調べる。

我々は次の様な作用素の族を考える：ある確率空間 (Ω, P) 上で $\mathbb{R}^d$ 上の1次微分形式に値をとる確率場 $b=\sum_{j=1}^{d} b_j(x)dx^j$ と実数値確率場 $V=V_\omega(x)$ を考える。(ここで $\omega\in\Omega$, $x\in\mathbb{R}^d$ である) $(db.(x), V.(x))_{x\in\mathbb{R}}$ はパラメーター x に関して定常性とエルゴード性をもつと仮定する。(後の2節条件 (A.1), (A.2) 参照) b とV には後で更に条件を課す。これらに対して $\mathbb{R}^d$ 上の複素数値2乗可積分関数の空間 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上で形式的に次の様に書ける作用素を考える：

$$L(b_\omega, V_\omega) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} - ib^j(x)\right)^2 + V_\omega(x) \quad (i=\sqrt{-1})$$

すると $L(b_\omega, V_\omega)$ のスペクトルは P 測度零集合の元を除い

ては ω に無関係であることが分かる。

我々の目標はこのスペクトルについて研究することである。我々は磁場をもたない random な Schrödinger 作用素に対する多くの結果が磁場をもつ場合に拡張出来ることを示す。磁場が無い場合の結果は例えば Carmona-Lacroix の本 [3] に分かりやすくまとめられている。

特に4節では density of statesの台の下限での漸近挙動を考える。Pastur [14] や中尾 [13] による汎関数積分的方法（[3]の Chapter IV 参照）によればこの問題は次の(1.1)式の様に書ける density of states n(dx) の Laplace 変換の $t\to\infty$ での漸近挙動を考えることに帰着する：

$$(1.1)\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t} n(d\lambda) = \left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{d/2} E^{P\times W}\left[\exp\left(-\int_0^t db(*) - \int_0^t V(w(s))ds\right) \middle| w(t)=0\right]$$

ここで $E^{P\times W}$ は P と Wiener 測度の積測度に関する平均、w は 0 を出発点とする d 次元 Wiener 過程、$\int^t db(*)$ は 2-form db の確率積分である。この 2-form の積分の完全な定義は後の (3.2) にある。(1.1) の右辺は磁場があるために振動積分になっている。この様な無限次元空間上の振動積分の漸近挙動の問題は他にもいろいろな場面に現れるがあまり

有効な解決法は無い（例えば [7] を参照）。即ち上の問題は汎関数積分の興味深い漸近問題を与える。

4節では V は Gauss 型確率場であると仮定する。Gauss 型確率場 V は (1.1) の $t \to \infty$ の漸近挙動に db よりもはるかに強い影響を及ぼす。その結果、我々はその漸近挙動の主要項が磁場が無い場合の Pastur の結果[14]と同じになることが示せる。我々はこのことを次の様にして証明する：まず上からの評価は (1.1) 式から明らかである。下からの評価には関数解析的方法（[3]の Chapter IV、Kirsch-Martinelli [8] 参照）の手法を用いる。即ち $\mathbb{R}^d$ の任意の直方体 Dに対して

$$(1.2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t} n(d\lambda) \geq \frac{1}{|D|} \operatorname{tr}\left[e^{-tL(b_\omega, V_\omega)_D} \right]$$

が成り立つことを用いる。ここで $|D|$ は D の体積、$L(b, V)_D$ は ∂D に Dirichlet 境界条件を課した $L_2(D)$ 上の作用素である。(1.2) 式の右辺を評価することにより下からの評価が得られる。

この note の次節以降の構成は次の様になっている：2節では磁場をもつ Schrödinger 作用素のスペクトルを考える為の1つの設定を与え、スペクトルの構造が確率1で決まることを示す。更に我々の設定に合うような従来考えられてき

た例を挙げる。3節では状態密度の存在とそのいくつかの性質を示す。4節では状態密度の漸近挙動を調べる。

2. random な磁場をもつ Schrödinger 作用素

この節では [3] に従って random な磁場をもつ Schrödinger 作用素を考える為の設定を与え、基本的な結果を述べる。更に従来考えられてきた例を挙げる。

$\Omega_1 = \Gamma_1(\mathbb{R}^d, T^*\mathbb{R}^d)$を C^1微分形式全体とし、それに広義一様収束位相を与える。$\mathbb{F}_1 = \mathbb{B}(\Omega_1)$ を Ω_1 の Borel 集合族、$\mathbb{G}$ を

$$\mathbb{G} = \{B \in \mathbb{F}_1;\ b \in B,\ db = db' \Rightarrow b' \in B\}$$

で定義される $\mathbb{F}_1$ の部分 σ 集合族とする。$L(\mathbb{R}^d)$ を$\mathbb{R}^d$上の全ての実数値可測関数の集合とし、$(\Omega_2, \mathbb{F}_2)$ を次の2つの条件を満たす可測空間とする：i) Ω_2 から $L(\mathbb{R}^d)$ への写像 V で写像 $\Omega_2 \times \mathbb{R}^d \ni (\omega, x) \mapsto V(\omega, x) =: V_\omega(x) \in \mathbb{R}$ が $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{B}(\mathbb{R}^d)$-可測となるものが存在する。ii) 任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対して Ω_2 上の可測変換 T_x で $V(T_x\omega, y) = V(\omega, x+y)$ となるものが存在する。

$L(\mathbb{R}^d) \ni V$ が、それぞれ、$d \geq 3$ ならば

$$\lim_{a \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{|x-y| \leq a} |x-y|^{2-d} |V(y)| dy = 0$$

を満たすとき、$d=2$ ならば

$$\lim_{a \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{|x-y| \leq a} \log(1/|x-y|)|V(y)|dy = 0$$

を満たすとき、集合 K_d に属すと言う。任意の有界領域 D に対して $V\chi_D$ が K_d に属すとき V は集合 K_d^{loc} に属すと言う。$V_+ = \max\{V, 0\}$ が K_d^{loc} に属し、$V_- = \max\{-V, 0\}$ が K_d に属すとき、V は集合 $\mathbb{K}_d$ に属すと言う。[16] で集合 $\mathbb{K}_d$ の元は Schrödinger 作用素の potential として適当であることが述べられている。例えば集合 $\mathbb{K}_d$ の元に対応する Schrödinger 作用素は連続な熱核を持つことが知られている。

任意の $(b, V) \in \Omega_1 \times \mathbb{K}_d$ に対して $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素 $L(b, V)$ を $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素

$$f \mapsto -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} - ib^j(x)\right)^2 f + V(x)f$$

の唯一つの自己共役拡張として定義する([16] Theorem B. 12.1参照)。$\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$ と置く。$(\Omega, \mathbb{G} \times \mathbb{F}_2)$上の確率測度 P は次の3つの条件を満たすとする:

(A.1)(定常性)任意の $B \in \mathbb{G} \times \mathbb{F}_2$ と $x \in \mathbb{R}^d$に対して

$P(T_x B) = P(B)$.

(A.2)(エルゴード性)$B \in \mathbb{G} \times \mathbb{F}_2$ が任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対して $P(T_x B \ominus B) = 0$ ならば $P(B) = 0$ か 1。

(A.3) $P(V\in \mathbb{K}_d\cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^d))=1$

我々はこの P の下で作用素の族 $\{L(b,V_\omega);(b,\omega)\in\Omega\}$ を考える。一般に作用素 L に対してそのスペクトル、点スペクトル、絶対連続スペクトル、特異連続スペクトルを $\Sigma(L)$ $\Sigma_{pp}(L)$, $\Sigma_{ac}(L)$, $\Sigma_{sc}(L)$ で表わす。

するとまず次を得る。([3] Proposition V.2.4 参照)

定理 2.1. もし $(\Omega,\mathbb{G}\times\mathbb{F}_2)$ 上の確率測度 P が (A.1), (A.2), (A.3) を満たすならば $\mathbb{R}$ の閉集合 $\Sigma,\Sigma_{pp},\Sigma_{ac}$, Σ_{sc} が存在して測度 P に関して殆ど全ての $(b,\omega)\in\Omega$ に対して $\Sigma(L(b,V_\omega))=\Sigma$, $\Sigma_{pp}(L(b,V_\omega))=\Sigma_{pp}$, $\Sigma_{ac}(L(b,V_\omega))=\Sigma_{ac}$, $\Sigma_{sc}(L(b,V_\omega))=\Sigma_{sc}$.

証明. $E(\Lambda,b,V)$, $\Lambda\in\mathbb{B}(\mathbb{R})$, を作用素 $L(b,V)$ のスペクトル分解、

$$E(\cdot,b,V)=E_{pp}(\cdot,b,V)+E_{ac}(\cdot,b,V)+E_{sc}(\cdot,b,V)$$

をその Lebesgue 分解とする。上の定理を証明するには任意の $\Lambda,A\in\mathbb{B}(\mathbb{R})$ と $\#=pp,ac,sc$ に対して

$$\{(b,\omega)\in\Omega;\ \mathrm{tr}\,E_\#(\Lambda,b,V_\omega)\in A\}=:B$$

が T_x-不変な $\mathbb{G}\times\mathbb{F}_2$ の元であることを示せばよい。ところが B が T_x-不変な $\mathbb{F}_1\times\mathbb{F}_2$ の元であることは b=0の時

と同様にして示せる（[3]の§V.2と§V.3参照）。すると作用素 $L(b,V)$ の gauge 不変性により B は $\mathbb{G}\times\mathbb{F}_2$ の元であることが分かる。□

同様に $b=0$ の場合に対応する結果を参照して次が示せる（[3] Proposition V.2.8 参照）：

定理 2.2. $(\Omega,\mathbb{G}\times\mathbb{F}_2)$ 上の確率測度 P が(A.1),(A.2),(A.3)を満たせば次が成り立つ：

i) $\Sigma_{disc}(L(b,V))=\phi$,　　P-a.s.

ii) 作用素 $L(b,V)$ のスペクトル重複度が P-almost surely に有限ならば各実数 λ に対して λ は P-almost surely に $L(b,V)$ の固有値でない。

最後に例を挙げる：

例 2.1. db は deterministic な定数（即ち ω にも x にも依らない2次微分形式），$V=V_\omega(x)$は $\mathbb{R}^d$ 上の定常性とエルゴード性をもつ確率場とする。この場合、我々の条件(A.1),(A.2),(A.3)は満たされる。$d=2$ の時これは量子ホール効果の研究対象となっており、このことに関して多くの研

究がある（[1],[11]等）。またある状態密度の構造についての結果がある（[10],[19]）。

例 2.2. $db(x)$ と $V(x)$ は deterministic（即ち ω に依らない）で x について同じ周期をもつ周期関数であるとする。この場合も我々の設定にあてはめることが出来ることが知られている（[3]の §V.3.1 の例1参照）。この場合、スペクトル構造についての結果がある（[4],[5],[6]）。

3. Density of states

この節では [13] に従って density of states を導入し、そのいくつかの性質を述べる。$W=\{w:[0,\infty)\to\mathbb{R}^d$:連続, $w(0)=0\}$ に広義一様収束位相を与え、P^W をその上の Wiener 測度とする。即ち $w(t)$ は P^W の下で $w(0)=0$, $E^W[w^i(t)w^j(s)]=\delta_{ij}t\wedge s$ となる Gauss 過程とする。ここで E^W は P^W に関する平均である。$(\Omega,\mathbb{G}\times\mathbb{F}_2)$ 上の確率測度 P で (A.1)と (A.2) と次の2つを満たすものを考える

(A.4) ある $r>2$ があって任意の $t>0$ に対して

$$E^{P\times W}\left[\exp\left(-r\int_0^t V(w(s))ds\right)\right]<\infty,$$

(A.5) $P(db:C^1,\ V\in\mathbb{K}_d\cup C(\mathbb{R}^d))=1.$

ここで $E^{P\times W}$ は積測度 $P\times P^W$ に関する平均、$C(\mathbb{R}^d)$ は $\mathbb{R}^d$ 上の全ての実数値連続関数の集合である。

各直方体領域 $D=\Pi(-a_j,a_j)(a_j>0)$ に対して $(L(b,V)_D, D(L(b,V)_D))$ を対称作用素 $(L(b,V),C^\infty(D))$ の Friedrichs 拡大とする。すると [15],[16] の議論により次を得る：

補題 3.1. 作用素 $(L(b,V)_D, D(L(b,V)_D))$ は次の様に表わせる熱核をもつ：

$$
e^{-tL(b,V)_D}(x,y)
$$

$$
=E^W\left[\exp\left(-i\sum_{j=1}^{d}\int_0^t b_j(x+w(s))\circ dw^j(s)-\int_0^t V(x+w(s))ds\right)\right.
$$

$$
\left.\times\chi_{\{\tau_D(x)>t\}}\,\middle|\,x+w(t)=y\right]\left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{d/2}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right)
$$

ここで $\tau_D(x)=\inf\{s>0;x+w(s)\notin D\}$。この熱核は $(t,x,y)\in(0,\infty)\times D\times D$ について連続である。

条件 (A.4) と (3.1) から P-almost all $(b,\omega)\in\Omega$ に対して $\exp(-tL(b,V)_D)$ は $L_2(D)$ 上の Hilbert-Schmidt 作用素であることが分かる。従って

$$
\Sigma(L(b,V)_D)=\Sigma_{disc}(L(b,V)_D)
$$

$$=:\{\lambda_{D,b,V,1}\leqq\lambda_{D,b,V,2}\leqq\cdots\nearrow\infty\}$$

となることが分かる。実数 λ に対して

$$N_{D,b,V}(\lambda):=\frac{1}{|D|}\#\{j;\lambda_{D,b,V,j}\leqq\lambda\}$$

とおく。これは λ の増加関数である。$n_{D,b,V}(d\lambda)$ を $N_{D,b,V}(\lambda)$ から決まる測度とする。測度 $n_{D,b,V}(d\lambda)$ の Laplace 変換 $\mathcal{L}(n_{D,b,V},t)$ は

$$\mathcal{L}(n_{D,b,V},t)=\int_{\mathbb{R}}e^{-\lambda t}n_{D,b,V}(d\lambda)$$

$$=\frac{1}{|D|}\mathrm{tr}\left[e^{-tL(b,V)_D}\right]$$

となる。補題 3.1 と Marcer の展開定理により

$$\mathcal{L}(n_{D,b,V},t)=\frac{1}{|D|}\int_D e^{-tL(b,V)_D}(x,x)dx$$

となる。更に (3.1) と確率積分に対する Stokes' theorem ([8],[17]) を用いることにより

$$\mathcal{L}(n_{D,b,V},t)=\frac{1}{|D|}\left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{d/2}\int_D E^w\left[\exp\left(-i\int_0^t db(x+*)\right.\right.$$

(3.2)

$$\left.\left.-\int_0^t V(x+w(s))ds\right)\chi_{\{\tau_D(x)>t\}}\middle|\, w(t)=0\right]dx$$

を得る。ここで

$$\int_0^t db(x+*) = \sum_{j<k}\int_0^t\left(\int_0^t (db)_{j,k}(x+uw(s))2udu\right)\circ dS_{j,k}(s)$$

$$S_{j,k}(t) = \frac{1}{2}\int_0^t (w^j(s)dw^k(s) - w^k(s)dw^j(s))$$

([8],[17]) である。すると (db,V) は定常性とエルゴード性をもつので db=0 の場合と同じ多次元のエルゴード理論を用いる議論により次の存在定理を得る：

定理 3.1. P-almost all $(b,\omega)\in\Omega$ に対して $n_{D,b,V}(d\lambda)$ は $D\to\mathbb{R}^d$ のとき(即ち全ての a_j が同時に $+\infty$ に行くとき) ある deterministic な (即ち (b,ω) に依らない) 測度 $n(d\lambda)$ に漠収束する。更に $n(d\lambda)$ の Laplace変換は

$$(3.3)\qquad \mathcal{L}(n,t) = \left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{d/2} E^w\left[\exp\left(-i\int_0^t db(*) - \int_0^t V(w(s))ds\right)\middle| w(t)=0\right]$$

で与えられる。

$n(d\lambda)$ を <u>density of states</u>、増加関数
$N(\lambda) := n((-\infty,\lambda])$ を <u>integrated density of states</u> と呼ぶ。

次に density of states の性質を述べる。今後条件 (A.3) を仮定する。次の結果は磁場が無い場合の簡単な拡張である。([3] Proposition VI.1.3 参照)

命題 3.1. 任意の $\mathbb{R}^d$ 上の正の C^∞-関数 f で compact な台をもち、$\int f(x)^2 dx = 1$ となるものと任意の $\mathbb{R}$ の有界な Borel 集合 A に対して、作用素 $fE(A, b, V)f$ は P-almost all (b, ω) に対して trace class の作用素である。更に

$$n(A) = E^P[tr[fE(A, b, V)f]]$$

が成り立つ。

この命題から次が簡単に分かる。

命題 3.2. density of states の台は定理 2.1 の Σ に一致する:

$$\mathrm{supp}\ n = \Sigma .$$

更にここで P は σ-加法族 $\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2$ 上でも定義されているとする。もし P-almost all (b, ω) に対してスペクトル分解の射影作用素 $E(A, b, V)$ が連続な積分核 $E(A, b, V, x, y)$ をもつならば、命題 3.1 より

$$n(A)=E^P[E(A,b,V,0,0)]$$

が分かる（[3] Remark VI.5.1 参照）。一方 [16] の Theorem C.5.2 の証明の議論により次を得る：

補題 3.1. b は C^∞微分形式で、ある正数 k に対して $(1+|x|)^{-k}\|\nabla^2 b(x)\|$ が有界とする。V は $\mathbb{K}_d$ の元とする。すると任意の有界な Borel 集合 A に対して、作用素 L(b,V) のスペクトル分解の射影作用素 E(A,b,V)は連続な積分核 E(A,b,V,x,y)をもつ。

従って次を得る：

命題 3.3. もし P-測度 1 で b が C^∞微分形式で、ある b に依る正数 k に対して $(1+|x|)^{-k}\|\nabla^2 b(x)\|$ が有界ならば、任意の有界な Borel 集合 A に対して

$$n(A)=E^P[E(A,b,V,0,0)]。$$

4．N(λ) の漸近挙動

この節では 3 節で導入した関数 N(λ) の漸近挙動を調べる。まず N(λ) の λ↑∞ の漸近挙動を考える（[3] Theorem VI.2.1, [13] Theorem 7.3 参照）。

定理 4.1. 条件 (A.1),(A.2),(A.4),(A.5) の下で

$$(4.1)\qquad \lim_{t\downarrow 0} £(n,t)(2\pi t)^{d/2} = 1$$

が成り立つ。従って Tauberian theorem により

$$(4.2)\qquad \lim_{\lambda\uparrow\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{d/2}} = \frac{1}{\Gamma(d/2+1)(2\pi)^{d/2}}$$

を得る。

証明. (3.1) において Wiener 過程の時空変換をすることにより

$$£(n,t)(2\pi t)^{d/2} = E^{P\times W}[H(t,w,b,\omega)\mid w(1)=0]$$

となる。ここで

$$H(t,w,b,\omega) = \exp\left(-it\int_0^1 db(\sqrt{t}*) - t\int_0^1 V(\sqrt{t}w(s))ds\right)$$

である。$P\times P^W(\cdot\mid w(1)=0)$-almost all (w,b,ω)に対して $t\downarrow 0$ のとき $H(t,w,b,\omega)\to 0$ となることはすぐに分かる。また $\{H(t), 0<t<1\}$ が $P\times P^W(\cdot\mid w(1)=0)$ に関して一様可積分であることも分かる。実際 W の任意の Borel 集合 Λ に対して

$$E^{P\times W}[\,|\,H(t,w)\,|\,;\Lambda \mid w(1)]$$
$$\leqq E^{P\times W}\left[\exp\left(-t\int_0^1 V(\sqrt{t}\,w(s))\,ds\right)\middle|\, w(1)=0\right]^{2/r}$$
$$\times P^{W}(\Lambda \mid w(1)=0)^{1/q}$$

である。ここで r は条件 (A.4) の数、q は $2/r+1/q=1$ となる数である。[13] の Remark 3.2 により

$$\sup_{0<t<1} E^{P\times W}\left[\exp\left(-\frac{r}{2}t\int_0^1 V(\sqrt{t}\,w(s))\,ds\right)\middle|\, w(1)=0\right]$$
$$\leqq 2^{d/2} E^{P\times W}\left[\exp\left(r\int_0^{1/2} V(w(s))\,ds\right)\right]$$

である。これは条件 (A.4) より有限である。□

次に $N(\lambda)$ の $\lambda\downarrow-\infty$ の漸近挙動を考える。次の定理は [14] の Theorem III.6 の拡張である([3] Proposition VI.2.2, [13] Theorem 7.1. 参照):

定理 4.2. 確率測度 P が条件 (A.1), (A.2), (A.5) と次を満たすとする:

(A.6) P の下で V は平均 m、分散 γ の連続な見本関数をもつ Gauss 型確率場である。γ は零でない。

(A.7) db と V は独立である。あるいはある正の数 δ_0 があって δ_0 より小さい任意の正の数 δ に対して δ に依るある正の数 λ_δ があって

$$P(\inf \Sigma (L(b,0)_{\{|x|<\delta\}}) < \lambda_\delta) = 1。$$

このとき

$$\lim_{t\uparrow\infty} \frac{1}{t^2} \log £(n,t) = \frac{\gamma(0)}{2}$$

が成り立つ。従って Tauberian theorem により

$$(4.4) \qquad \lim_{\lambda\downarrow-\infty} \frac{1}{\lambda^2} \log N(\lambda) = \frac{-1}{2\gamma(0)},$$

が成り立つ。

証明. 上からの評価は b=0 の場合と全く同じである。即ち

$$(2\pi t)^2 £(n,t) \leqq E^{P\times W}\left[\exp\left(-\int_0^t V(w(s))ds\right) \middle| w(t)=0\right]$$

$$= E^W\left[\exp\left(-mt+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t \gamma(w(s)-w(r))dsdr\right) \middle| w(t)=0\right]$$

$$\leqq \exp\left(-mt+\frac{t^2}{2}\gamma(0)\right)。$$

従って

$$(4.5)\qquad \overline{\lim_{t\uparrow\infty}}\ \frac{1}{t^2}\log \pounds(n,t) \leqq \frac{\gamma(0)}{2}。$$

下からの評価には関数解析的方法（[3] の Chapter IV 参照）の手法を用いる。即ち

$$D(i)=\Pi_j[a_{j,i},b_{j,i}),\quad a_{j,i}<b_{j,i}\ (1\leqq j\leqq d)$$

という形の 2 つの互いに交わらない領域 D(1),D(2) に対して最小最大原理により

$$\mathrm{tr}\left[e^{-tL(b,V)_{D(1)+D(2)}}\right]$$

$$\geqq \mathrm{tr}\left[e^{-tL(b,V)_{D(1)}}\right]+\mathrm{tr}\left[e^{-tL(b,V)_{D(2)}}\right]$$

となる。このことを用いる。すると Kirsch-Martinelli [8]（[3] § VI.1.3）の議論により $D=[-1/2,1/2)^d$ に対して

$$\pounds(n,t)\geqq E^P\left[\mathrm{tr}\left[e^{-tL(b,V)_D}\right]\right]$$

となる。更に最小最大原理を用いることにより min{1, δ_0} より小さい任意の正の数 δ に対して

$$\mathrm{tr}\left[e^{-tL(b,V)_D}\right]\geqq \mathrm{tr}\left[e^{-tL(b,V)_{\{|x|<\delta\}}}\right]$$

$$\geqq \mathrm{tr}\left[e^{-tL(b,0)_{\{|x|<\delta\}}}\right]\exp\left(-t\sup_{|x|<\delta}V\right)$$

となる。ここでもし$P(\inf \Sigma(L(b,0)_{||x|<\delta|}) < \lambda_\delta) = 1$であれば

$$£(n,t) \geq e^{-t\lambda_\delta} E^P\left[\exp\left(-t \sup_{|x|<\delta} V\right)\right]$$

となるので

$$(4.6) \quad \varliminf_{t\uparrow\infty} \frac{1}{t^2} \log £(n,t)$$

$$\geq \varliminf_{t\uparrow\infty} \frac{1}{t^2} \log E^P\left[\exp\left(-t \sup_{|x|<\delta} V\right)\right]$$

を得る。他方 db と V が独立であるときには

$$\varliminf_{t\uparrow\infty} \frac{1}{t^2} \log £(n,t)$$

$$\geq \varliminf_{t\uparrow\infty} \frac{1}{t^2} \log E^P\left[tr\left[e^{-tL(b,0)_{||x|<\delta|}}\right]\right]$$

$$+ \varliminf_{t\uparrow\infty} \frac{1}{t^2} \log E^P\left[\exp\left(-t \sup_{|x|<\delta} V\right)\right]$$

となり、Jensen の不等式と Lebesgue の収束定理を用いることにより

$$\varliminf_{t\uparrow\infty} \frac{1}{t^2} \log E^P\left[tr\left[e^{-tL(b,0)_{||x|<\delta|}}\right]\right]$$

$$\geqq E^P\left[\varliminf_{t\uparrow\infty}\frac{1}{t^2}\log \mathrm{tr}\left[e^{-tL(b,0)_{\{|x|<\delta\}}}\right]\right]$$

$$= 0$$

となるのでこのときも（4.6）式を得る。次に（4.6）式の右辺を評価する。このとき平均 $m=0$ と過程してよい。V を

$$V(x)=E[V(x)\mid V(0)]+(V(x)-E[V(x)\mid V(0)])$$

と分解する。$E[V(x)\mid V(0)]$ と $V(x)-E[V(x)\mid V(0)]$ は独立で $E[V(x)\mid V(0)]$ と $V(0)\gamma(x)/\gamma(0)$ は分布が等しい。従って

$$\varliminf_{t\uparrow\infty}\frac{1}{t^2}\log E^P\left[\exp\left(-t\sup_{|x|<\delta}V\right)\right]$$

$$\geqq \varliminf_{t\uparrow\infty}\frac{1}{t^2}\log E^P\left[\exp\left(-t\sup_{|x|<\delta}\frac{\gamma(x)}{\gamma(0)}V(0)\right)\right]$$

$$+\varliminf_{t\uparrow\infty}\frac{1}{t^2}\log E^P\left[\exp\left(-t\sup_{|x|<\delta}(V(x)-E[V(x)\mid V(0)])\right)\right]$$

となる。$V(0)$ はよく知られた 1 次元正規分布に従うので簡単に

$$\varliminf_{t\uparrow\infty}\frac{1}{t^2}\log E^P\left[\exp\left(-t\sup_{|x|<\delta}\frac{\gamma(x)}{\gamma(0)}V(0)\right)\right]$$

$$\geqq \inf_{|x|<\delta}\gamma(x)^2\Big/2\gamma(0)$$

を得る。一方、Jensen の不等式を用いることにより

$$\underline{\lim}_{t\uparrow\infty} \frac{1}{t^2} \log E^P\left[\exp\left(-t \sup_{|x|<\delta} (V(x)-E[V(x) \mid V(0)])\right)\right]$$

$$\geq -\overline{\lim}_{t\uparrow\infty} \frac{1}{t} E^P\left[\sup_{|x|<\delta} (V(x)-E[V(x) \mid V(0)])\right]$$

となる。この右辺は 0 である。なぜならば

$$\left| E^P\left[\sup_{|x|<\delta} (V(x)-E[V(x) \mid V(0)])\right]\right|$$

$$\leq 2E^P\left[\sup_{|x|<\delta} |V(x)|\right] < \infty$$

だからである。以上により

$$\underline{\lim}_{t\uparrow\infty} \frac{1}{t^2} \log \pounds(n,t) \geq \inf_{|x|<\delta} \gamma(x)^2 / 2\gamma(0)$$

を得る。δ はいくらでも小さくとれるので

$$\underline{\lim}_{t\uparrow\infty} \frac{1}{t^2} \log \pounds(n,t) \geq \frac{\gamma(0)}{2}$$

を得る。

謝辞．この研究は筆者が湯川奨学生として東京大学理学部の小谷教授の研究室に行ったときのものです。ここに小谷教授ならびに関係者の方に感謝の意を表わしたいと思います。

文献

[1] J. Bellissard: *K-theory of C^*-algebras in solid state physics*, Lecture Notes in Physics **257** (1986) 99-156, Springer.

[2] H.L.Cycon, R.G.Froese, W.Kirsch and B.Simon: Schrödinger operators, Springer, 1987.

[3] R.Carmona and J.Lacroix: Spectral theory of random Schrödinger operators, Birkhäuser, 1990.

[4] B.A.Dubrovin and S.P.Novikov: *Ground states in a periodic field. Magnetic Bloch functions and vector bundles*, Soviet Math. Dokl. **22** No.1(1980), 240-244.

[5] B.Helffer and J.Sjöstrand: *Analyse semi—classique pour l'équation de Harper (avec application à de l'équation de Schrödinger avec champ magnetique)*, Memoire de la Société Mathématiques de France, n° 34, Supplément au Bulletin de la S.M.F.116, (1988) fascicule 4.

[6] B.Helffer and J.Sjöstrand: *Equation de Schrödinger avec champ magnétique et équation de Harper*,

Lecture Notes in Physics **345** (1989), 118-197, Springer.

[7] N.Ikeda: *Probabilistic methods in the study of asymptotics*, Lecture Notes in Mathematics **1427** (1990), 195-325, Springer.

[8] N.Ikeda and S.Manabe: *Integral of differential forms along the path of diffusion processes*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **15** (1979), 827-852.

[9] W.Kirsch and F.Martinelli: *On the density of states of Schrödinger operators with a random potential*, J. Phys. A. **15** (1982), 2139-2156.

[10] A.Klein and J.F.Perez: *On the density of states for random potentials in the presence of a uniform magnetic field*, Nuclear Physics **B251[FS13]** (1985), 199-211.

[11] H.Kunz: *The quantum Hall effect for electrons in a random potential*, Commun.Math.Phys.**112** (1987), 121-145.

[12] H.Matsumoto: *On the integrated density of states for the Schrödinger operators with certain random electromagnetic potentials*, (preprint).

[13] S.Nakao: *On the spectral distribution of the Schrödinger operator with random potential*, Japan J.Math. 3 (1977), 111-139.

[14] L.A.Pastur: *Spectra of random self adjoint operators*, Russ.Math.Surv. 28 (1973), 1-67.

[15] B.Simon: Functional integration and quantum physics, Academic Press, 1979.

[16] B.Simon: *Schrödinger semigroups*, Bull.Amer.Math. Soc. 7 (1982), 447-526.

[17] Y.Takahashi and S.Watanabe: *The probability functions (Onsager-Machlup functions) of diffusion processes*, Lecture Notes in Mathematics 851 (1981), 433-463, Springer.

[18] N.Ueki: *On spectra of random Schrödinger operators with magnetic fields*, (preprint).

[19] F.Wegner: *Exact density of states for lowest Landau level in white noise potential, superfield representation for interacting systems*, Z.Phys. B51 (1983), 279-285.